Esercizi su Linguaggi Context-Free

Esercizio 1 Mostrate che per il lemma di Ogden si può utilizzare la stessa costante N del pumping lemma ($N = 2^k$, dove k è il numero di variabili di una grammatica in forma normale di Chomsky che genera il linguaggio considerato).

! **Esercizio 2** Una grammatica context-free è detta *lineare* se ogni produzione contiene al più una variabile sul lato destro. Un linguaggio è detto lineare se può essere generato da una grammatica lineare (ad esempio l'insieme delle stringhe palindrome). Riscrivete la dimostrazione del pumping lemma partendo da una grammatica lineare. In particolare, provate il seguente enunciato:

> *Se L è un linguaggio lineare allora esiste una costante N tale che ogni $z \in L$ con $|z| \geq N$ può essere scritta nella forma $z = uvwxy$ in modo che $|uvwx| \leq N$, $vx \neq \varepsilon$ e, per ogni $i \geq 0$, $uv^iwx^iy \in L$.*

La costante N può essere scelta proporzionale al numero di variabili (anziché esponenziale come nel caso generale). Nel determinarla occorre anche tenere conto del numero massimo di terminali che posso essere generati ad ogni passo di derivazione.

Esercizio 3 Individuate, tra i seguenti linguaggi, quelli che non sono context-free. Per gli altri, facendo riferimento all'esercizio precedente, stabilite se siano linerari:

- $L = \{a^n b^m a^m b^n \mid n, m \geq 0\}$.
- $L = \{a^n b^n a^m b^m \mid n, m \geq 0\}$.
- $L = \{a^n b^m a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$.
- $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.
- $L = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ o } j = k\}$.
- L'insieme delle parentesi ben bilanciate.
- L'insieme delle stringhe non palindrome su un alfabeto di almeno due lettere.

Esercizio 4 Sia PAL il linguaggio delle stringhe palindrome sull'alfabeto $\{a, b\}$. Abbiamo dimostrato che sia PAL sia PAL^c sono context-free fornendo degli automi a pila che li accettano. Scrivete una grammatica per generare PAL^c.

 Un maggior numero di punti esclamativi prima di un esercizio indica maggiore difficoltà.

Esercizio 5 Dimostrate che i due linguaggi seguenti sono context-free:

- PALSTAR $= \{w_1\sharp w_2\sharp\cdots\sharp w_k \mid k \geq 0, w_i \in \text{PAL}, i = 1,\ldots,k\}$,
- QuasiPALSTAR $= \{w_1\sharp w_2\sharp\cdots\sharp w_k \mid k \geq 0, \exists\text{uno e un solo } i \in \{1,\ldots,k\} \text{ t.c. } w_i \notin \text{PAL}\}$.

Fornite le grammatiche per i due linguaggi e descrivete un automa a pila per QuasiPALSTAR.

! **Esercizio 6** Dato un linguaggio L su un alfabeto Σ, sia $c(L)$ l'*immagine commutativa* di L, cioè il linguaggio ottenuto permutando in tutti i modi possibili i simboli delle stringhe in L. Ad esempio se $L = (ab)^*$ allora $c(L) = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$. Rispondete alle seguenti domande, giustificando la risposta, nei seguenti casi: l'alfabeto Σ contiene un solo simbolo, l'alfabeto Σ contiene due simboli, l'alfabeto Σ contiene più di due simboli.

- Se L è regolare allora $c(L)$ è regolare?
- Se L è context-free allora $c(L)$ è context-free?
- !! Se L è regolare allora $c(L)$ è context-free?
- Se $c(L)$ è context-free allora esiste un linguaggio regolare L' tale che $c(L) = c(L')$?

! **Esercizio 7** La conversione da automi a pila a grammatiche context-free vista a lezione può aumentare il grado di ambiguità. Ciò è dovuto alle produzioni della forma $[qAp] \to [qAr][rAp]$ (se nella parte di computazione che porta dallo stato q allo stato p con A in cima alla pila, la pila torna all'altezza iniziale più volte, nella grammatica si ottengono più derivazioni per la parte di input letta). Modificate la conversione in modo che il grado di ambiguità non aumenti.

Suggerimento: Si possono utilizzare due tipi di triplette $[qAp]$ e $[qAp]'$. Le prime hanno lo stesso significato di quelle utilizzate nella conversione. Le seconde corrispondono a parti di computazione in cui la pila non può mai raggiungere nei passi intermedi la stessa altezza che ha all'inizio e alla fine. Si possono sostituire le produzioni $[qAp] \to [qAr][rAp]$ con produzioni in cui si "spezza" la computazione in corrispondenza della prima configurazione intermedia in cui la pila torna alla stessa altezza della configurazione in cui lo stato è q, cioè con produzioni $[qAp] \to [qAr]'[rAp]$. Naturalmente occorre rivedere anche le altre produzioni e definire quelle per le variabili $[qAp]'$.

Esercizio 8 Sia L un linguaggio context-free deterministico e L un linguaggio regolare. Fornite una costruzione di un automata a pila deterministico M' che accetti il prodotto LR a partire da un automa a pila deterministico M che accetta L e un automa a stati finiti A che accetta R. Perché non è possibile utilizzare la stessa costruzione, o una simile, per RL?

Suggerimento: M' simula le mosse di M. Ogni volta che M raggiunge uno stato finale, M' continua a simulare M e, in parallelo, inizia a simulare A sul rimanente suffisso dell'input. A tale scopo gli stati di M' sono coppie formate da uno stato di M e da un insieme di stati di A...

! **Esercizio 9** Sia L un linguaggio context-free e L un linguaggio regolare. Fornite una costruzione di un automata a pila M' che accetti il quoziente L/R a partire da un automa a pila M che accetta L e un automa a stati finiti A che accetta R.

Suggerimento: Ci si può ispirare all'esercizio precedente. In questo caso non si richiede la costruzione di un automa a pila deterministico[1] Ad ogni passo M' può "immaginare" che l'input sia terminato e, tramite ε-mosse verificare l'esistenza di una stringa accettata da A che concatenata all'input letto porti M ad accettare.

[1]Nel caso L sia un linguaggio context-free deterministico, con una costruzione molto più complicata è possibile ottenere un automata a pila deterministico per il quoziente.