Corso di Teoria dei Linguaggi
Anno Accademico 2018–2019
Prof. Giovanni Pighizzini

Esercizi su Linguaggi Regolari

Esercizio 1 Considerate l'insieme delle stringhe il cui simbolo centrale è una a, cioè il linguaggio

$$L = \{x \in \{a,b\}^* \mid \text{il simbolo di } x \text{ in posizione } \lfloor \tfrac{|x|}{2} \rfloor \text{ è una } a\}\,.$$

Dimostrate che esiste un insieme infinito di stringhe distinguibili rispetto a L. Concludete quindi che L non è regolare. Dimostrate poi lo stesso risultato utilizzando il pumping lemma per i linguaggi regolari.

! **Esercizio 2** Dimostrate, utilizzando il pumping lemma o trovando un insieme infinito di stringhe tra loro distinguibili, che i seguenti linguaggi non sono regolari:

- $\{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$.
- $\{a^p \mid p \text{ è un numero primo}\}$.
- $\{a^{n!} \mid n \geq 0\}$.

Esercizio 3 Date due strighe $x = a_1 a_2 \cdots a_n$ e $y = b_1 b_2 \cdots b_n$ della stessa lunghezza n ($a_i, b_i \in \Sigma$, per $i = 1, \ldots, n$), sia $g(x,y)$ la stringa ottenuta alternando i simboli di x e b, cioè $g(x,y) = a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots a_n b_n$. Dati due linguaggi L', L'' definiamo

$$g(L', L'') = \{g(x,y) \mid x \in L', y \in L'' \text{ e } |x| = |y|\}\,.$$

Esempi: $g(a^*, b^*) = (ab)^*$, $g((ab)^*, b^*) = (abbb)^*$. Dimostrate che la classe dei linguaggi regolari è chiusa rispetto all'operazione g.

Suggerimento: Ispirandovi alla costruzione dell'automa prodotto (intersezione, unione), fornite una costruzione per ottenere a partire dagli automi che accettano L' e L'', un automa che accetta $g(L', L'')$.

Esercizio 4 Dimostrate che se L è un linguaggio regolare, allora lo sono anche i seguenti linguaggi:

- $\text{init}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists x \in \Sigma^* \text{ t.c. } wx \in L\}$.
- $\min(L) = \{w \in L \mid \forall x, y \in \Sigma^* \text{ t.c. } xy \in L,\ x \neq w \text{ implica } x \notin L\}$.
- $\max(L) = \{w \in L \mid \forall x \Sigma^* wx \notin L\}$.

Un maggior numero di punti esclamativi prima di un esercizio indica maggiore difficoltà.

In ognuno dei casi, fornite una costruzione per ottenere un automata che accetta il linguaggio considerato a partire da un automa che accetta L.

! Esercizio 5 Dimostrate che se L è un linguaggio regolare, allora lo è anche il linguaggio:

$$\mathrm{cyc}(L) = \{x_1x_2 \in \Sigma^* \mid x_1, x_2 \in \Sigma^* \text{ e } x_2x_1 \in L\}\,.$$

Fornite una costruzione per ottenere un automata che accetta il linguaggio $\mathrm{cyc}(L)$ a partire da un automa che accetta L.

!! Esercizio 6 Dimostrate che se L è un linguaggio regolare, allora lo è anche il linguaggio:

$$\frac{1}{2}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \text{ con } |x| = |y| \text{ e } xy \in L\}\,.$$

Fornite una costruzione per ottenere un automata che accetta il linguaggio $\frac{1}{2}(L)$ a partire da un automa che accetta L.

!! Esercizio 7 Dimostrate che se L è un linguaggio regolare, allora lo sono anche i seguenti linguaggi:

- $\frac{1}{3}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y, z \in \Sigma^* \text{ con } |x| = |y| = |z| \text{ e } xyz \in L\}\,.$
- $2\frac{1}{3}(L) = \{y \in \Sigma^* \mid \exists x, z \in \Sigma^* \text{ con } |x| = |y| = |z| \text{ e } xyz \in L\}\,.$
- $3\frac{1}{3}(L) = \{z \in \Sigma^* \mid \exists x, y \in \Sigma^* \text{ con } |x| = |y| = |z| \text{ e } xyz \in L\}\,.$

Cosa si può dire del linguaggio $\{xz \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \text{ con } |x| = |y| = |z| \text{ e } xyz \in L\}$?

!! Esercizio 8 Dimostrate che se L è un linguaggio regolare, allora lo è anche il linguaggio:

$$\log(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \text{ con } |y| = 2^{|w|} \text{ e } wy \in L\}\,.$$

!!! Esercizio 9 Dimostrate che se L è un linguaggio regolare, allora lo è anche il linguaggio:

$$\mathrm{ROOT}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid w^{|w|} \in L\}\,.$$