

## Esercizi su Linguaggi Regolari

**Esercizio 1** Considerate l'insieme delle stringhe il cui simbolo centrale è una  $a$ , cioè il linguaggio

$$L = \{x \in \{a, b\}^* \mid \text{il simbolo di } x \text{ in posizione } \lfloor \frac{|x|}{2} \rfloor \text{ è una } a\}.$$

Dimostrate che esiste un insieme infinito di stringhe distinguibili rispetto a  $L$ . Concludete quindi che  $L$  non è regolare. Dimostrate poi lo stesso risultato utilizzando il pumping lemma per i linguaggi regolari.

**! Esercizio 2** Dimostrate, utilizzando il pumping lemma o trovando un insieme infinito di stringhe tra loro distinguibili, che i seguenti linguaggi non sono regolari:

- $\{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$ .
- $\{a^p \mid p \text{ è un numero primo}\}$ .
- $\{a^{n!} \mid n \geq 0\}$ .

**Esercizio 3** Date due stringhe  $x = a_1a_2 \cdots a_n$  e  $y = b_1b_2 \cdots b_n$  della stessa lunghezza  $n$  ( $a_i, b_i \in \Sigma$ , per  $i = 1, \dots, n$ ), sia  $g(x, y)$  la stringa ottenuta alternando i simboli di  $x$  e  $b$ , cioè  $g(x, y) = a_1b_1a_2b_2 \cdots a_nb_n$ . Dati due linguaggi  $L', L''$  definiamo

$$g(L', L'') = \{g(x, y) \mid x \in L', y \in L'' \text{ e } |x| = |y|\}.$$

Esempi:  $g(a^*, b^*) = (ab)^*$ ,  $g((ab)^*, b^*) = (abbb)^*$ . Dimostrate che la classe dei linguaggi regolari è chiusa rispetto all'operazione  $g$ .

*Suggerimento:* Ispirandovi alla costruzione dell'automa prodotto (intersezione, unione), fornite una costruzione per ottenere a partire dagli automi che accettano  $L'$  e  $L''$ , un automa che accetta  $g(L', L'')$ .

**Esercizio 4** Dimostrate che se  $L$  è un linguaggio regolare, allora lo sono anche i seguenti linguaggi:

- $\text{init}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists x \in \Sigma^* \text{ t.c. } wx \in L\}$ .
- $\text{min}(L) = \{w \in L \mid \forall x, y \in \Sigma^* \text{ t.c. } xy \in L, x \neq w \text{ implica } x \notin L\}$ .
- $\text{max}(L) = \{w \in L \mid \forall x \in \Sigma^* wx \notin L\}$ .

In ognuno dei casi, fornite una costruzione per ottenere un automata che accetta il linguaggio considerato a partire da un automa che accetta  $L$ .

**! Esercizio 5** Dimostrate che se  $L$  è un linguaggio regolare, allora lo è anche il linguaggio:

$$\text{cyc}(L) = \{x_1x_2 \in \Sigma^* \mid x_1, x_2 \in \Sigma^* \text{ e } x_2x_1 \in L\}.$$

Fornite una costruzione per ottenere un automata che accetta il linguaggio  $\text{cyc}(L)$  a partire da un automa che accetta  $L$ .

**!! Esercizio 6** Dimostrate che se  $L$  è un linguaggio regolare, allora lo è anche il linguaggio:

$$\frac{1}{2}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \text{ con } |x| = |y| \text{ e } xy \in L\}.$$

Fornite una costruzione per ottenere un automata che accetta il linguaggio  $\frac{1}{2}(L)$  a partire da un automa che accetta  $L$ .

**!! Esercizio 7** Dimostrate che se  $L$  è un linguaggio regolare, allora lo sono anche i seguenti linguaggi:

- $\frac{1}{3}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y, z \in \Sigma^* \text{ con } |x| = |y| = |z| \text{ e } xyz \in L\}.$
- $2\frac{1}{3}(L) = \{y \in \Sigma^* \mid \exists x, z \in \Sigma^* \text{ con } |x| = |y| = |z| \text{ e } xyz \in L\}.$
- $3\frac{1}{3}(L) = \{z \in \Sigma^* \mid \exists x, y \in \Sigma^* \text{ con } |x| = |y| = |z| \text{ e } xyz \in L\}.$

Cosa si può dire del linguaggio  $\{xz \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \text{ con } |x| = |y| = |z| \text{ e } xyz \in L\}$  ?

**!! Esercizio 8** Dimostrate che se  $L$  è un linguaggio regolare, allora lo è anche il linguaggio:

$$\log(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \text{ con } |y| = 2^{|w|} \text{ e } wy \in L\}.$$

**!!! Esercizio 9** Dimostrate che se  $L$  è un linguaggio regolare, allora lo è anche il linguaggio:

$$\text{ROOT}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid w^{|w|} \in L\}.$$