# Esercizi

## 6. Tecnica *greedy*

**Esercizio 6.1**
Supponete di disporre di una cassaforte in cui volete collocare $k$ scatole $s_1, s_2, \ldots, s_k$ contenti degli oggetti preziosi. Ogni scatola $s_i$ ha un'altezza $h_i$ e contiene un oggetto di valore $v_i$. Inoltre, a causa delle ristrette dimensioni, l'unico modo per collocare le scatole nella cassaforte è quello di impilarle una sopra l'altra. Tuttavia, la somma delle altezze delle scatole supera l'altezza $h$ della cassaforte e, dunque, alcune scatole non possono essere collocate nella cassaforte. Naturalmente, si vorrebbe trovare una soluzione in cui il valore totale delle scatole collocate nella cassaforte sia il massimo possibile (o, equivalentemente, quello delle scatole che restano fuori sia minimo).

Ad esempio, se ci sono 3 scatole, con $h_1 = 10$, $v_1 = 8$, $h_2 = 5$, $v_2 = 3$, $h_3 = 6$, $v_3 = 6$ e l'altezza della cassaforte è 14, la soluzione ottima è $\{s_2, s_3\}$. Tuttavia, se vi fosse un'ulteriore scatola con $h_4 = 4$ e $v_4 = 6$, la soluzione ottima sarebbe $\{s_1, s_4\}$.

- Indicate in modo formale (mediante opportune formule e disuguaglianze), i vincoli che devono essere soddisfatti da ogni *soluzione ammissibile* e ogni da *soluzione ottima* del problema. Fornite anche una formula che esprima la *funzione obiettivo*.

- Scrivete lo pseudo-codice di un algoritmo greedy che scelga le scatole, selezionando di volta in volta quella di valore più grande.

- Supponete $h = 20$. Definite un insieme di 5 scatole (fornendone altezze e valori) per cui l'algoritmo trova la soluzione ottima.

- L'algoritmo greedy trova *sempre* (cioè qualunque siano le altezze e i valori nelle scatole) la soluzione ottima? Motivate la risposta. In particolare, in caso di risposta negativa, presentate un'istanza del problema su cui l'algoritmo non trova la soluzione ottima.

**Esercizio 6.2**
Consideriamo ora una variante dell'Esercizio 6.1. Nel caso non si riescano a collocare tutte le scatole in una sola cassaforte, si dovranno acquistare altre casseforti in maniera che non rimangano scatole incustodite, cioè in modo tale che ogni scatola sia collocata in una cassaforte. Poiché una cassaforte è molto costosa, si vuole trovare una soluzione che minimizzi il numero totale di casseforti utilizzato.

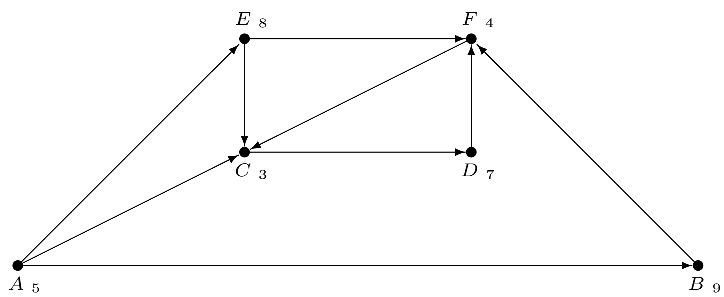
- Individuate una strategia greedy per risolvere il problema.

- Indicate se la strategia fornisce sempre la soluzione ottima, motivando la risposta. In particolare, in caso di risposta negativa, presentate un'istanza del problema su cui l'algoritmo non trova la soluzione ottima.

Data pubblicazione: 2 dicembre 2019

**Esercizio 6.3**

Dato un grafo $G = (V, E)$ con una funzione $\omega : V \to \mathbb{N}$ che associa un peso a ogni *vertice* del grafo, definiamo il *peso di un cammino* in $G$ come la somma dei pesi di tutti i vertici appartenenti al cammino. Inoltre diciamo che un cammino da un vertice $u$ a un vertice $v$ è *semplice e massimale* se non contiene vertici ripetuti e non può essere allungato aggiungendo alla fine vertici non visitati nel cammino (cioè ogni vertice adiacente a $v$ appartiene già al cammino). Ad esempio, nel grafo nella seguente figura il cammino semplice $(E, F, C)$ non è massimale, mentre $(E, F, C, D)$ lo è. Il peso di ciascun vertice è indicato a destra del nome. Si noti che il peso di $(E, F, C, D)$ è 22.




Dato un vertice $u$ del grafo, si vuole determinare un cammino semplice massimale di peso massimo che inizia in $u$

- Scrivete lo pseudo-codice di un algoritmo greedy che partendo dal cammino costituito dal solo vertice $u$, costruisca un cammino semplice massimale scegliendo di volta in volta il vertice di peso massimo non ancora visitato che sia adiacente all'ultimo vertice del cammino già costruito (nel grafo in figura, partendo da $E$ l'algoritmo costruirà il cammino $(E, F, C, D)$).
- Applicate l'algoritmo al grafo in figura, partendo dal vertice $A$. La soluzione ottenuta è ottima?
- Se la risposta alla domanda precedente è affermativa, trovate una differente funzione peso per la quale l'algoritmo, applicato a partire dal vertice $A$, determini una soluzione che non sia ottima.

**Esercizio 6.4**

Svolgete l'esercizio 6.3 considerando il seguente grafo: