

Esercizi

7. Tecnica *greedy*

Esercizio 7.1

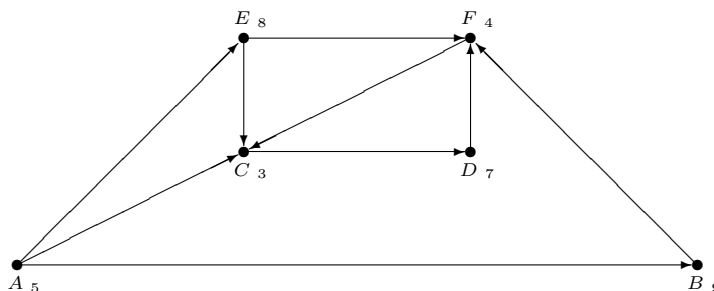
Supponete di disporre di una cassaforte in cui volete collocare k scatole s_1, s_2, \dots, s_k contenenti degli oggetti preziosi. Ogni scatola s_i ha un'altezza h_i e contiene un oggetto di valore v_i . Inoltre, a causa delle ristrette dimensioni, l'unico modo per collocare le scatole nella cassaforte è quello di impilarle una sopra l'altra. Tuttavia, la somma delle altezze delle scatole supera l'altezza h della cassaforte e, dunque, alcune scatole non possono essere collocate nella cassaforte. Naturalmente, si vorrebbe trovare una soluzione in cui il valore totale delle scatole collocate nella cassaforte sia il massimo possibile (o, equivalentemente, quello delle scatole che restano fuori sia minimo).

Ad esempio, se ci sono 3 scatole, con $h_1 = 10, v_1 = 8, h_2 = 5, v_2 = 3, h_3 = 6, v_3 = 6$ e l'altezza della cassaforte è 14, la soluzione ottima è $\{s_2, s_3\}$. Tuttavia, se vi fosse un'ulteriore scatola con $h_4 = 4$ e $v_4 = 6$, la soluzione ottima sarebbe $\{s_1, s_4\}$.

- Scrivete lo pseudo-codice di un algoritmo greedy che scelga le scatole, selezionando di volta in volta quella di valore più grande.
- Supponete $h = 20$. Definite un insieme di 5 scatole (fornendone altezze e valori) per cui l'algoritmo trova la soluzione ottima.
- L'algoritmo greedy trova *sempre* (cioè qualunque siano le altezze e i valori nelle scatole) la soluzione ottima?

Esercizio 7.2

Dato un grafo $G = (V, E)$ con una funzione $\omega : V \rightarrow \mathbb{N}$ che associa un peso a ogni *vertice* del grafo, definiamo il *peso di un cammino* in G come la somma dei pesi di tutti i vertici appartenenti al cammino. Inoltre diciamo che un cammino da un vertice u a un vertice v è *semplice e massimale* se non contiene vertici ripetuti e non può essere allungato aggiungendo alla fine vertici non visitati nel cammino (cioè ogni vertice adiacente a v appartiene già al cammino). Ad esempio, nel grafo nella seguente figura il cammino semplice (E, F, C) non è massimale, mentre (E, F, C, D) lo è. Il peso di ciascun vertice è indicato a destra del nome. Si noti che il peso di (E, F, C, D) è 22.



Dato un vertice v del grafo, si vuole determinare un cammino semplice massimale di peso massimo.

- Scrivete lo pseudo-codice di un algoritmo greedy che partendo dal cammino costituito dal solo vertice v , costruisca un cammino semplice massimale scegliendo di volta in volta il vertice di peso massimo non ancora visitato che sia adiacente all'ultimo vertice del cammino già costruito (nel grafo in figura, partendo da E l'algoritmo costruirà il cammino (E, F, C, D)).
- Applicate l'algoritmo al grafo in figura, partendo dal vertice A . La soluzione ottenuta è ottima?
- Se la risposta alla domanda precedente è affermativa, trovate una differente funzione peso per la quale l'algoritmo, applicato a partire dal vertice A , determini una soluzione che non sia ottima.

Esercizio 7.3

Svolgete l'esercizio 7.2 considerando il seguente grafo:

